4-Poisson Dağılımı :

Binom dağılımının özel bir hali olan dağılımdır. Bir bakıma binom dağılımının limiti sayılabilir. Binom dağılımında n çok büyük, p'de sıfıra çok yakın olduğu durumlarda binom dağılımının olasılık fonksiyonunu kullanmak uzun olur ve hesaplamaları mümkün olmaz. Esas olarak bernoulli ve binom şartlarının gerçekleştiği düşünülürse, binom formülü

$$p(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = \frac{n.(n-1).(n-2)\ldots(n-x+1)}{x!} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

şeklinde idi. Burada beklenen değer $\lambda = np$ yazılırsa, $p = \frac{\lambda}{n}$ olur.

Şimdi $n \to \infty$, $p \to 0$ olduğunda λ'nın sabit olduğu düşünülürse,

$$p(x) = \frac{n.(n-1)\ldots(n-x+1)}{x!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-x+1}{n} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

$n \to \infty$ için $\frac{n}{n}, \frac{n-1}{n}, \ldots = 1$ düşünülebilir,

$n \to \infty$, $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$, $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \to 1$ olacaktır

Böylece; poisson X t.d. sine ait olasılık fonk.nu.

$$p(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots$$

Beklenen değer ve varyans:

$$E(x) = \sum_{R_x} x \cdot p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$$

, $x! = x.(x-1)!$
$\lambda^x = \lambda . \lambda^{x-1}$
yazalım

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots\right)$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda \,//$$

$$E(x^2) = \sum_{R_x} x^2 \cdot p(x)$$

, $x^2 = x.(x-1) + x$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} [x.(x-1) + x] \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$$

$$= \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\cancel{x.(x-1)} \cdot e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x-2} \cdot \lambda^2}{\cancel{x.(x-1)}.(x-2)!} + \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}}_{=\lambda}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda^2 \cdot \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda} + \lambda$$

$$= \lambda^2 + \lambda \,//$$

$$\Rightarrow V(x) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \,//$$

bulunur.

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot e^t)^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda \cdot e^t}$$

$$= e^{\lambda \cdot (e^t - 1)} \text{ // olur.}$$

$$\Phi_x(t) = E(e^{itx}) = e^{\lambda \cdot (e^{it} - 1)} \text{ //}$$

$$\boxed{\text{Not: } \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{\lambda} \text{ //}}$$

λ : Birim zamanda meydana gelen ortalama olay sayısı.

X : Meydana gelen rasgele olay sayısı. $X \sim Pois(\lambda)$

$$E(X) = V(V) = \lambda$$

$$\boldsymbol{P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}} \quad , \quad X = 0,1,2, ...$$

Soru: Bir kavşakta haftada ortalama 3 kaza olmaktadır. Bir haftada 5 kaza olması olasılığı nedir?

$$P(X = 5) = \frac{e^{-3}3^{5}}{5!} = 0{,}10$$

Soru : Bir sınıftaki öğrencilerin %2'sinin boyları 190 cm'nin üzerindedir. Bu sınıftan rasgele seçilen 100 öğrenciden

a) 6'sının

b) en az 2'sinin boylarının 190 cm'den fazla olması olasılıklarını bulunuz?

P=0.02<0.05 olduğundan λ=np=100*0.02=2

a) $$P(X = 6) = \frac{e^{-2}2^{6}}{6!} = 0{,}01203$$

b) $\boldsymbol{P(X = 0) = \frac{e^{-2}2^{0}}{0!}}$ =0,13534 , $\boldsymbol{P(X = 1) = \frac{e^{-2}2^{1}}{1!}}$ =0,27068

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(0) - P(1) = 0.59398$$